Exercice| [3447] | 1| Utilisation de la représentation matricielle

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Pistes de réflexion

— On obtiendra une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$ en regardant la famille des vecteurs colonnes de $\mathrm{Mat}(f)$, puisqu'il s'agit des images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
— Le théorème du rang donnera ensuite la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$...
— et la contemplation de deux des colonnes de $\mathrm{Mat}(f)$ permettra d'obtenir une base du noyau de f.

Éléments de correction

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où :

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0) \\ e_2 & = & (0,1,0) \\ e_3 & = & (0,0,1) \end{array}$$

Par construction de $\mathrm{Mat}(f)$, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} f\,(e_1) & = & (3,-1,1) \\ f\,(e_2) & = & (1,1,1) \\ f\,(e_3) & = & (-3,1,-1) \end{array} \right.$

Par théorème, puisque $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\,(f) & = & \mathrm{Vect}\,\left(f\,(e_1)\,, f\,(e_2)\,, f\,(e_3)\right) \\ & = & \mathrm{Vect}\,\left((3,-1,1)\,, (1,1,1)\,, (-3,1,-1)\right) \\ & = & \mathrm{Vect}\,\left((3,-1,1)\,, (1,1,1)\right) \end{array}$$

La famille $\mathcal{F} = ((3,-1,1)\,, (1,1,1))$ est une famille de deux vecteurs non nuls et non colinéaires, donc par théorème, elle est libre.
Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$, donc par définition elle forme une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
Par suite, la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ étant égale au nombre de vecteurs de l'un de ses bases, on en déduit que $\dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = 2$, et par suite que $\mathrm{rg}\,(f) = 2$ par définition.
D'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim\left(\mathbb{R}^3\right)}_{=3} = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) + \underbrace{\mathrm{rg}\,(f)}_{=2}$$

et donc il vient que : $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1$, ce qui signifie que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est engendré par un seul vecteur.

On remarque alors que :
$$\begin{array}{rcl} f\,(e_1) + f\,(e_3) & = & (3,-1,1) + (-3,1,-1) \\ & = & (3+(-3), (-1)+1, 1+(-1)) \\ & = & (0,0,0) \\ & = & \overrightarrow{0} \end{array}$$

Or par linéarité de f, on a : $f\,(e_1) + f\,(e_3) = f\,(e_1 + e_3)$.
On en déduit donc que $f\,(e_1 + e_3) = \overrightarrow{0}$.
Par suite, on en déduit que $e_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
Comme $e_1 + e_3 = (1,0,1) \neq \overrightarrow{0}$, il vient que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1,0,1))$.