Exercice| [3446] | 1| Écrire la matrice d'une application linéaire

Soit $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x-y-3z) \end{array} \right. \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$.

Écrire la matrice $\mathrm{Mat}(u)$ de u.

Pistes de réflexion

- On obtient la matrice de u par calcul des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on exprime dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- On met ensuite en forme la matrice de u à partir de ces calculs d'images.

Éléments de correction

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où :

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0) \\ e_2 & = & (0,1,0) \\ e_3 & = & (0,0,1) \end{array}$$

De même, on note $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ où :

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & (1,0) \\ f_2 & = & (0,1) \end{array}$$

Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} u\left(e_1\right) & = & (1+0-0, 2\times 1-0-3\times 0) \\ & = & (1,2) \\ & = & 1\times(1,0)+2\times(0,1) \\ & = & 1\times f_1+2\times f_2 \end{array}$$

Puis : $\begin{array}{rcl} u\left(e_2\right) & = & (0+1-0, 2\times 0-1-3\times 0) \\ & = & (1,-1) \\ & = & 1\times(1,0)-1\times(0,1) \\ & = & 1\times f_1-1\times f_2 \end{array}$

et : $\begin{array}{rcl} u\left(e_3\right) & = & (0+0-1, 2\times 0-0-3\times 1) \\ & = & (-1,-3) \\ & = & -1\times(1,0)-3\times(0,1) \\ & = & -1\times f_1-3\times f_2 \end{array}$

On en déduit alors que la matrice $\mathrm{Mat}(u)$ de u est donc : $\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$