## Exercice| [3437] | 1| Base du noyau et de l'image

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x+y+2z, -x+y+z, -2x+y+2z) \end{array} \right.$.

On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

**(1).** Déterminer une base du noyau de $f$ ainsi que $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

**(2).** En déduire le rang de $f$, puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.

## Pistes de réflexion

**(1).** On reviendra à la définition des éléments du noyau pour traduire sous forme de conditions portant sur les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ son appartenance au noyau de $f$, pour déduire ensuite une base du noyau de $f$.

**(2).** On obtiendra le rang de $f$ à l'aide du théorème du rang, de sorte qu'il sera aisé ensuite de proposer une famille base de $\mathrm{Im}(f)$ puisque l'on saura combien de vecteurs formant une famille il faudra donner.

## Éléments de correction

**(1).** Par définition : $\quad \mathrm{Ker}(f) = \left\{ u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(u) = \overrightarrow{0} \right\}$

Ainsi, il vient :

$$\begin{array}{rcl} (u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)) & \Leftrightarrow & \left( f(u) = \overrightarrow{0} \right) \\ & \Leftrightarrow & ((-2x+y+2z, -x+y+z, -2x+y+2z) = (0,0,0)) \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} -2x+y+2z = 0 \\ -x+y+\ z = 0 \\ -2x+y+2z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \left( \begin{array}{c} (x,y,z) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array}$$

On procède alors à un échelonnement en lignes du système $\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2}}{\sim_L} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En notant $x$, $y$ et $z$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Finalement, on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} (u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)) & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & (u \in \mathrm{Vect}((1,0,1))) \end{array}$$

et par suite, on a : $\quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$.

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle et est donc un espace de dimension $1$.

**(2).** D'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=1} + \mathrm{rg}(f)$$

et par suite, il vient que $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Par définition, on en déduit que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension $2$. Ainsi, toute base de $\mathrm{Im}(f)$ est formée d'exactement deux vecteurs.

On considère alors les deux vecteurs $f(1,0,0)$ et $f(0,1,0)$ qui sont par construction deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$.

Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (-2\times 1 + 0 + 2\times 0, -1+0+0, -2\times 1 + 0 + 2\times 0) \\ & = & (-2,-1,-2) \end{array}$$

et : $$\begin{array}{rcl} f(0,1,0) & = & (-2\times 0 + 1 + 2\times 0, -0+1+0, -2\times 0 + 1 + 2\times 0) \\ & = & (1,1,1) \end{array}$$

Ces deux vecteurs sont non nuls et non colinéaires. Par suite par théorème, la famille $\mathcal{F} = (f(1,0,0), f(0,1,0))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$.

Comme $\mathcal{F}$ est une famille libre de $2$ vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ qui est lui même de dimension $2$, on en déduit par théorème, que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.