Exercice| [3436] | 1| Recherche de rang

Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ P & \longmapsto & P(x+1)-P(x-1) \end{array} \right.$. On admet que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[x])$.

(1). Déterminer les images par φ de la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.

(2). En déduire le rang de φ.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit d'expliciter la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ et de calculer les images par f de ces vecteurs, en tenant compte que l'on est amené à réaliser des composées d'expressions polynomiales...

(2). Par définition, le rang de φ est égal à la dimension de l'image de φ, ce qui consiste à étudier le caractère libre de la famille génératric de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ trouvée précédemment.

Éléments de correction

(1). En notant $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, où l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P_0 : & x \longmapsto & 1 \\ P_1 : & x \longmapsto & x \\ P_2 : & x \longmapsto & x^2 \\ P_3 : & x \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$

un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} f(P_0) & = & 1-1 \\ & = & 0 \end{array}$

De même : $\begin{array}{rcl} f(P_1) & = & (x+1)-(x-1) \\ & = & 2 \end{array}$

et : $\begin{array}{rcl} f(P_2) & = & (x+1)^2-(x-1)^2 \\ & = & x^2+2x+1-\left(x^2-2x+1\right) \\ & = & x^2+2x+1-x^2+2x-1 \\ & = & 4x \end{array}$

puis : $\begin{array}{rcl} f(P_3) & = & (x+1)^3-(x-1)^3 \\ & = & x^3+3x^2+3x+1-\left(x^3-3x^2+3x-1\right) \\ & = & x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1 \\ & = & 6x^2+2 \end{array}$

(2). Par définition, le rang de φ est la dimension de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.
En notant $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, on a par théorème que :

$$\mathrm{Im}\,(\varphi) = \mathrm{Vect}\,\left(f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)\right)$$

On en déduit donc que d'après ce qui précède que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\,(f) & = & \mathrm{Vect}\,\left(x \longmapsto 0, x \longmapsto 2, x \longmapsto 4x, x \longmapsto 6x^2+2\right) \\ & = & \mathrm{Vect}\,\left(x \longmapsto 2, x \longmapsto 4x, x \longmapsto 6x^2+2\right) \end{array}$$

La famille $\mathcal{F} = \left\{x \longmapsto 2, x \longmapsto 4x, x \longmapsto 6x^2+2\right\}$ est une famille de polynôme de degrés échelonnés, donc par théorème, elle est libre.
La famille $\mathcal{F} = \left\{x \longmapsto 2, x \longmapsto 4x, x \longmapsto 6x^2+2\right\}$ est donc une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$, donc par définition, elle forme une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.
La dimension de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ étant égal au nombre de vecteurs de l'une de ses bases, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = 3$ et par suite que $\mathrm{rg}\,(\varphi) = 3$.