Exercice| [3434] | 1| Caractère usuel des espaces isomorphes

Parmi les espaces vectoriels suivants, lesquels sont isomorphes ?

$$\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}_8[x] - \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) - \mathbb{R}^3 - \mathbb{R}_3[x] - \mathbb{R}^4 - \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) - \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

Pistes de réflexion

— On sait que deux espaces de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.

Éléments de correction

Par théorème, pour E et F deux espaces de dimension finie :

$$(E \text{ et } F \text{ sont isomorphes}) \quad \Leftrightarrow \quad (\dim(E) = \dim(F))$$

Ici, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} \dim\left(\mathbb{R}^2\right) & = & 2 \\ \dim\left(\mathbb{R}_8[x]\right) & = & 9 \\ \dim\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right) & = & 4 \\ \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & 3 \\ \dim\left(\mathbb{R}_3[x]\right) & = & 4 \\ \dim\left(\mathbb{R}^4\right) & = & 4 \\ \dim\left(\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\right) & = & 9 \\ \dim\left(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right) & = & 2 \end{array}\right.$

On en déduit donc que :
— $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ sont isomorphes ;
— $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_3[x]$ et $\mathbb{R}^4$ sont isomorphes ;
— $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_8[x]$ sont isomorphes.