Exercice| [3433] | 1| Espaces isomorphes

Soient $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,b) & \longmapsto & a+\mathrm{i}\,b \end{array} \right.$ et $g: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[x] \\ (a,b) & \longmapsto & ax+b \end{array} \right.$.

On admet que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}\right)$ et $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_1[x]\right)$.

(1). Sont-elles injectives ?

(2). Sont-elles surjectives ?

(3). Qu'en conclure ?

Pistes de réflexion

Pour chacune des applications proposées :

— Le caractère injectif s'obtiendra à partir de la description des éléments de leur noyau $\boxed{\text{ou}}$ en revenant à la définition de l'injectivité pour une application.

— Le caractère surjectif s'obtiendra à partir de la description de leur image $\boxed{\text{ou}}$ en revenant à la définition de la surjectivité d'une application.

— Dès lors qu'elles porteront à la fois le caractère injectif et surjectif, elles seront bijectives.

Éléments de correction

(1). **Injectivité de f :** Soient $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$.

Montrons que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, c'est à dire que $\left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & = & a_2 \\ b_1 & = & b_2 \end{array} \right.$.

Par définition de f, on a donc $a_1 + \mathrm{i}\,b_1 = a_2 + \mathrm{i}\,b_2$.

Par unicité de la forme algébrique d'un complexe, on en déduit que $\left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & = & a_2 \\ b_1 & = & b_2 \end{array} \right.$ et ainsi que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, ce qui assure le caractère injectif de f.

Injectivité de g : Soient $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(a_1, b_1) = g(a_2, b_2)$.

Montrons que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, c'est à dire que $\left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & = & a_2 \\ b_1 & = & b_2 \end{array} \right.$.

Par définition de g, on a : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que $\left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & = & a_2 \\ b_1 & = & b_2 \end{array} \right.$ et ainsi que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, ce qui assure le caractère injectif de g.

(2). **Surjectivité de f :** soit $z = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ donné par sa forme algébrique.

Il est immédiat que $z = f(a, b)$, et ainsi, z possède au moins un antécédent par f, ce qui assure la surjectivité de f.

Surjectivité de g : soit $P : x \longmapsto ax + b \in \mathbb{R}_1[x]$.

Il est immédiat que $g(a, b) = P$ et par suite que P possède au moins un antécédent par g, ce qui assure le caractère surjectif de g.

(3). **Caractère bijectif de f :** f étant injective et surjective, par définition, f est bijective.

Par suite, f étant une application linéaire bijective, par défintion c'est un isomorphisme,.

En conséquence, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont isomorphes.

Caractère bijectif de g : g étant injective et surjective, par définition, g est bijective.

Par suite, g étant une application linéaire bijective, par défintion c'est un isomorphisme,.

En conséquence, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}_1[x]$ sont isomorphes.