Exercice| [3432] | 1| Image d'une application linéaire

On admet que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \longmapsto & P+P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

(1). Déterminer $\mathrm{Im}\,(f)$.

(2). f est-elle surjective ?

Pistes de réflexion

(1). $\mathrm{Im}\,(f)$ est engendré par la famille formée des images d'une base de l'espace de départ de f, ici $\mathbb{R}_2[x]$ dont il convient alors d'étudier la liberté de cette dernière pour en déduire une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

(2). Le caractère surjectif de f s'obtient avec la comparaison de $\mathrm{Im}\,(f)$ à l'espace d'arrivée de f, ici $\mathbb{R}_2[x]$.

Éléments de correction

(1). En notant $P_0 : x \longmapsto 1$, $P_1 : x \longmapsto x$ et $P_2 : x \longmapsto x^2$ les vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$, par théorème, on sait que :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,\left(f\,(P_0)\,, f\,(P_1)\,, f\,(P_2)\right)$$

Un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} f\,(P_1) & = & 1 \\ f\,(P_2) & = & x+1 \\ f\,(P_3) & = & x^2+2x \end{array}$

Par suite, il vient :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto x+1, x \longmapsto x^2+3x\right)$$

La famille $\mathcal{F} = \left\{x \longmapsto 1, x \longmapsto x+1, x \longmapsto x^2+3x\right\}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, donc par théorème, elle forme une famille libre.

La famille $\mathcal{F}$ étant une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$, on en déduit qu'elle forme une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Par ailleurs, la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ étant égale au nombre de vecteurs de l'une de ses bases, on en déduit que $\dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = 3$ c'est à dire que $\mathrm{rg}\,(f) = 3$.

De plus, $\mathrm{Im}\,(f)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$, comme $\dim\,(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim\,(\mathbb{R}_2[x])$, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_2[x]$.

(2). On a ainsi :
— $f \in \mathcal{L}\,(\mathbb{R}_2[x])$
— $\mathrm{rg}\,(f) = 3$
— $\dim\,(\mathbb{R}_2[x]) = 3$

donc par théorème, f et surjective.