Exercice| [3431] | 1| Étude de l'injectivité

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$.

On rappelle que $f \in \mathcal{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

f est-elle injective ?

Pistes de réflexion

— On mobilisera le théorème liant l'injectivité et le noyau de f.

Éléments de correction

Puisque f est une application linéaire, par théorème, on a :

$$(f \text{ est injective}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{Ker}\,(f) = \{(0)\})$$

Par définition, on a : $\mathrm{Ker}\,(f) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f\,(M) = (0)\}$.
Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(f)\right) \quad & \Leftrightarrow \quad (f\,(M) = (0)) \\
& \Leftrightarrow \quad (AM - MA = (0)) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 2c & 2a-2b+2d \\ 2c & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2c = 0 \\ 2a - 2b + 2d = 0 \\ 2c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = b + d \\ b = b \\ c = 0 \\ d = d \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \left(M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que : $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Comme $\mathrm{Ker}\,(f) \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, par théorème, on en déduit que f n'est pas injective.