## Exercice| [3430] | 1| Dans un espace de polynômes

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ P & \longmapsto & \left(x^2-1\right) P'' + xP' \end{array} \right.$.

On admet que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.

## Pistes de réflexion

- On traduira l'appartenance d'un polynôme $P : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ quelconque de $\mathbb{R}_3[x]$ au noyau de $f$ sous forme d'un système linéaire portant sur les coefficients du polynôme $P$.
- La résolution de ce système permettra d'obtenir une caractérisation des vecteurs de $\operatorname{Ker}(f)$ à l'aide d'une famille base de $\operatorname{Ker}(f)$.

## Éléments de correction

Par définition : $\operatorname{Ker}(f) = \left\{P \in \mathbb{R}_3[x],\ f(P) = \tilde{0}\right\}$

Ainsi, il vient :

$$
\begin{array}{cl}
 & \left(P : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \in \operatorname{Ker}(f)\right) \\
\Leftrightarrow & \left(f(P) = \tilde{0}\right) \\
\Leftrightarrow & \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2-1\right) P''(x) + xP'(x) = 0\right) \\
\Leftrightarrow & \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2-1\right)(6ax+2b) + x\left(3ax^2+2bx+c\right) = 0\right) \\
\Leftrightarrow & \left(\forall x \in \mathbb{R},\ 6ax^3 + 2bx^2 - 6ax - 2b + 3ax^3 + 2bx^2 + cx = 0\right) \\
\Leftrightarrow & \left(\forall x \in \mathbb{R},\ 9ax^3 + 4bx^2 + (c-6a)x - 2b = 0\right) \\
\underset{\text{Identification des coefficients}}{\Leftrightarrow} & \begin{cases} 9a = 0 \\ 4b = 0 \\ -6a + c = 0 \\ -2b = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = d \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \left(P \in \operatorname{Vect}\ (x \longmapsto 1)\right)
\end{array}
$$

et par suite : $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\ (x \longmapsto 1)$.