Exercice| [3429] | 1| Dans $\mathbb{R}^3$

On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ où :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+y+z, x+2y) \end{array} \right.$$

Pistes de réflexion

- On traduira l'appartenance d'un vecteur $u = (x,y,z)$ quelconque de $\mathbb{R}^3$ au noyau de $f$ sous forme d'un système linéaire portant sur les coordonnées du vecteur $u$.
- La résolution de ce système permettra d'obtenir une caractérisation des vecteurs de $\operatorname{Ker}(f)$ à l'aide d'une famille base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Éléments de correction

Par définition, on a : $\operatorname{Ker}(f) = \left\{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^2,\ f(u) = \overrightarrow{0}\right\}$.
Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
(u = (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f)) &\Leftrightarrow \left(f(u) = \overrightarrow{0}\right) \\
&\Leftrightarrow ((x-y+z, 2x+y+z, x+2y) = (0,0,0)) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - \ y + z = 0 \\ 2x + \ y + z = 0 \\ x + 2y \qquad = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left( \begin{array}{c} (x,y,z) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

On résout par échelonnement en lignes le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant $(x,y,z)$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = \frac{1}{3}z \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
(u = (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f)) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = \frac{1}{3}z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = \frac{1}{3}z \\ z = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left(u \in \operatorname{Vect}\left(\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\right)\right) \\
&\Leftrightarrow (u \in \operatorname{Vect}((-2,1,3)))
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a : $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((-2,1,3))$.