## Exercice| [3419] | 1| Famille de matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

On considère les matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $E = \text{Vect}\ (I, J, K, L)$.

**(1).** Justifier que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

**(2).** Montrer que la famille $(I, J, K, L)$ est une famille libre de $E$.

**(3).** En déduire la dimension de $E$.

## Pistes de réflexion

**(1).** Le fait que $E$ soit en soit engendré par une famille d'éléments de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ lui confère son caractère sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

**(2).** La liberté de la famille s'obtient à partir de l'étude d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille.

**(3).** On dispose d'une famille libre et génératrice de $E$, donc d'une base...

## Éléments de correction

**(1).** $E$ est par définition l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{F} = \{I, J, K, L\}$ de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, donc par théorème est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

**(2).** Supposons que l'on ait : $(\star) : aI + bJ + cK + dL = (0)$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

La relation $(\star)$ s'écrit donc : $\begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ce qui amène directement par indentification des coefficients à $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$.

Par conséquent, la famille $\mathcal{F} = \{I, J, K, L\}$ est une famille libre de $E$.

**(3).** $\mathcal{F} = \{I, J, K, L\}$ est une famille libre et génétrice de $E$, donc par définition est une base de $E$.

Par suite, la dimension de $E$ est égale au nombre de vecteurs de la famille $\mathcal{F}$, c'est à dire que l'on a $\dim(E) = 4$.