Exercice| [3418] | 1| Base et rang

La famille $\mathcal{F} = \left(1+2x+3x^2, -1+2x+x^2, 1+x+x^2\right)$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}_2[x]$?

Pistes de réflexion

— On utilisera la caractérisation des familles bases par le rang de la matrice de la famille de vecteurs.

Éléments de correction

On note $P_1 : x \longmapsto 1+2x+3x^2$, $P_2 : x \longmapsto -1+2x+x^2$ et $P_3 : x \longmapsto 1+x+x^2$.
On remarque que $\mathcal{F}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[x]$ qui est un espace de dimension 3.
Par suite, en notant A la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, par théorème, on a : $\quad (\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x]) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}\,(A) = 3)$.

Par construction, on a : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Un échelonnement en lignes de la matrice A donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}\,(A) = 3$, et par suite, que la famille $\mathcal{F}$ est un base de $\mathbb{R}_2[x]$.