Exercice| [3417] | 1| Base et rang

La famille $\mathcal{F} = \left((0,1,2,1), (-5,0,-2,3), (2,1,2,-1), (3,0,4,1)\right)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Pistes de réflexion

— On utilise la caractérisation des familles bases par le rang de la matrice de la famille de vecteurs.

Éléments de correction

On note $u_1 = (0,1,2,1)$, $u_2 = (-5,0,-2,3)$, $u_3 = (2,1,2,-1)$, $u_4 = (3,0,4,1)$.
On sait que $\mathbb{R}^4$ est un espace de dimension finie égale à 4, et $\mathcal{F}$ est une famille de 4 vecteurs.
Ainsi, en notant A la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, par théorème : $\left(\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4\right) \Leftrightarrow (\mathrm{rg}(A) = 4)$.

Par construction, on a : $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Un échelonnement en lignes de la matrice A donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{5}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice A est de rang 3, ce qui donne que $\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.