Exercice| [3415] | 1| Compléter une base

Les deux polynômes $P_1 : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ et $P_2 : x \longmapsto 2x^3 + x^2 - 1$ forment une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$. À l'aide de la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, compléter la famille $\mathcal{F} : x \longmapsto (P_1, P_2)$ en une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Pistes de réflexion

— On cherche P_3 et P_4 de sorte que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ en remarquant que si de tels polynômes conviennent, alors nécessairement le rang de la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est égal à 4, puisque ce dire que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[x]$ impose que $\mathbb{R}_3[x] = \mathrm{Vect}\ (P_1, P_2, P_3, P_4)$ et donc que $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = \dim(\mathrm{Vect}\ (P_1, P_2, P_3, P_4))$.

— On choisira alors deux polynômes P_3 et P_4 parmi les quatre vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ qui est $\left(1, x, x^2, x^3\right)$, puis on construira la matrice de la famille de vecteurs (P_1, P_2, P_3, P_4) et on s'assurera que cette dernière est de rang 4. Si c'est le cas, on aura une base de $\mathbb{R}_3[x]$, sinon, on choisira deux autres polynômes.

— On concluera en remarquant que la famille ainsi construite est de rang 4 et possède 4 vecteurs, donc est libre. . . et une famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 est une. . . base !

Éléments de correction

On considère les polynômes $P_3 : x \longmapsto 1$ et $P_4 : x \longmapsto x$.
La matrice A de la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un échelonnement en lignes donne que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que la matrice A est de rang 4.
Or on sait que le rang de la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est égal au rang de la matrice de cette famille dans une base quelconque de $\mathbb{R}_3[x]$.
On en déduit donc que : $4 = \mathrm{rg}\ (P_1, P_2, P_3, P_4)$
Ainsi, (P_1, P_2, P_3, P_4) est une famille de 4 vecteurs qui est de rang 4, donc par théorème, elle forme une famille libre.
Par conséquent, (P_1, P_2, P_3, P_4) est une famille libre de 4 vecteurs de l'espace $\mathbb{R}_3[x]$ qui est de dimension 4, donc par théorème, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.