Exercice| [3414] | 1| Rang d'une famille de polynômes

On se place dans $\mathbb{R}_3[x]$. Quel est le rang de la famille $\mathcal{F} : x \longmapsto (P_1, \ldots, P_5)$ où :

$$P_1 : x \longmapsto 1 + 2x + x^2 - x^3$$
$$P_2 : x \longmapsto 2 - 3x - x^2 + x^3$$
$$P_3 : x \longmapsto 1 + x + 2x^3$$
$$P_4 : x \longmapsto 2 + 9x + 3x^2 + x^3$$
$$P_5 : x \longmapsto 4 + 24x + 8x^2 + 2x^3 \text{ ?}$$

Pistes de réflexion

- Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est égal au rang de la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
- On écrira donc la matrice de la famille de vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, que l'on échelonnera ensuite pour en déterminer le rang.

Éléments de correction

Par définition, on a : $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5))$.
En notant $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ la matrice de la famille $\mathcal{F}$ où $\mathcal{B} = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, par théorème, on a $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{rg}(A)$.

Par définition : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 9 & 24 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Un échelonnement en lignes donne que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 9 & 24 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{7}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{7}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & \frac{18}{7} & \frac{36}{7} & \frac{90}{7} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{9}{2}L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice A est donc 3.
Par suite, on en déduit que : $\begin{aligned} \operatorname{rg}(\mathcal{F}) &= \operatorname{rg}(A) \\ &= 3 \end{aligned}$

Finalement, on a : $\dim(\operatorname{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)) = 3$.