Exercice| [3401] | 1| Famille liée de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\mathrm{I}_3, A, A^2, A^3\right)$ est liée et trouver une relation de dépendance.

Pistes de réflexion

- On commencera par calculer les puissances de A.
- On partira d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille, pour montrer que la combinaison linéaire triviale n'est pas la seule qui permet de décomposer le vecteur nul, ce qui permettra d'obtenir le caractère lié et la relation de dépendance entre les vecteurs.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 54 & 36 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 36 & 8 \end{pmatrix}$.
Supposons alors que l'on ait : $(\star) : a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2 + dA^3 = (0)$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
La relation $(\star)$ devient donc :

$$\begin{pmatrix} a+2b+4c+8d & 9c+54d & 3b+12c+36d \\ 0 & a+2b+4c+8d & 0 \\ 0 & 3b+12c+36d & a+2b+4c+8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ est solution du système de représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 54 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Un échelonnement en lignes de ce dernier donne alors :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, on en déduit que : $\begin{cases} a = -8d \\ b = 12d \\ c = -6d \end{cases}, d \in \mathbb{R}$
ce qui implique que la famille $\mathcal{F} = \left\{\mathrm{I}_3, A, A^2, A^3\right\}$ n'est pas une famille libre puisque la combinaison linéaire triviale n'est pas la seule permettant d'obtenir le vecteur nul de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, on en déduit que : $\forall d \in \mathbb{R},\ -8d\mathrm{I}_3 + 12dA - 6dA^2 + dA^3 = (0)$
et donc en particulier pour $d = -1$: $8\mathrm{I}_3 - 12A + 6A^2 - A^3 = (0)$
qui nous donne une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille.