Exercice| [3388] | 1| Déterminer un noyau et une image

Déterminer une base du noyau et de l'image des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pistes de réflexion

— Il s'agira de déterminer les solutions du système de représentation matricielle $(A|0)$ pour obtenir le noyau de A, et exploiter les relations de compatibilités du système de représentation matricielle $(A|\bullet)$ pour obtenir une description de $\mathrm{Im}\,(A)$...

— ...et de refaire le même travail pour B.

Éléments de correction

Recherche du noyau de A : Par définition :

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ AX = (0)\}$$

On en déduit donc que :

$$\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A) \right) \Leftrightarrow (AX = (0))$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation matriciele } (A|0) \end{array} \right)$$

On procède à un échelonnement en lignes du système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant x_1, ..., x_4 les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_2 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Par suite il vient :

$$\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A) \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_2 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & = & x_2 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left(X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$$

et ainsi, on a : $\quad \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Recherche de l'image de A : Par définition :

$$\mathrm{Im}\,(A) = \{Y \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ AX = Y\}$$

Par suite, il vient :

$$\left(Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}\in \operatorname{Im}(A)\right) \Leftrightarrow (\exists X\in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ AX=Y)$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Le système de représentation}\\ \text{matricielle } (A|Y)\\ \text{est compatible}\end{array}\right)$$

On procède alors à un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $(A|Y)$ pour en déterminer les équations de compatibilités.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&y_1\\2&2&1&1&y_2\\0&0&1&0&y_3\\0&0&1&0&y_4\end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&y_1\\0&0&-1&1&-2y_1+y_2\\0&0&1&0&y_3\\0&0&1&0&y_4\end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3+1L_2\\ L_4\leftarrow L_4+1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&y_1\\0&0&-1&1&-2y_1+y_2\\0&0&0&1&-2y_1+y_2+y_3\\0&0&0&1&-2y_1+y_2+y_4\end{array}\right)$$
$$\underset{L_4\leftarrow L_4-1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&y_1\\0&0&-1&1&-2y_1+y_2\\0&0&0&1&-2y_1+y_2+y_3\\0&0&0&0&y_4-y_3\end{array}\right)$$

Ce système présente une équation de compatibilité qui est $y_4-y_3=0$.
Par suite, on en déduit que :

$$\operatorname{Im}(A)=\left\{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}\in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ y_4-y_3=0\right\}$$

On peut par ailleurs chercher une famille génératrice de $\operatorname{Im}(A)$:

$$\left(Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}\in \operatorname{Im}(A)\right) \Leftrightarrow (y_3-y_4=0)$$
$$\Leftrightarrow (y_3=y_4)$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc}y_1&=&y_1&&\\y_2&=&&y_2&\\y_3&=&&&y_4\\y_4&=&&&y_4\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left(Y\in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right)$$

et par suite on a : $\operatorname{Im}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Recherche du noyau de B : Par définition :

$$\operatorname{Ker}(B)=\{X\in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ BX=(0)\}$$

On en déduit donc que :

$$\left(X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker}(B)\right) \Leftrightarrow (BX=(0))$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}(x_1,x_2,x_3,x_4) \text{ est solution}\\ \text{du système de}\\ \text{représentation matricielle } (B|0)\end{array}\right)$$

On procède à un échelonnement en lignes du système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&0\\1&-1&2&1&0\\0&1&0&2&0\\1&0&1&1&0\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-1L_1\\ L_4\leftarrow L_4-1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&0\\0&-1&1&0&0\\0&1&0&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3+1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-1L_3\\ L_1\leftarrow L_1-1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&-1&0&-2&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$
$$\underset{L_2\leftarrow -1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&2&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

En notant $x_1,\ldots,x_4$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\left\{\begin{array}{ccc}x_1&=&x_4\\x_2&=&-2x_4\\x_3&=&-2x_4\end{array}\right.$$

Par suite il vient :

$$\left(X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker}(A)\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc}x_1&=&x_4\\x_2&=&-2x_4\\x_3&=&-2x_4\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc}x_1&=&x_4\\x_2&=&-2x_4\\x_3&=&-2x_4\\x_4&=&x_4\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left(X\in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)\right)$$

et ainsi, on a : $\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$.

Recherche de l'image de B : Par définition :

$$\mathrm{Im}\,(B) = \{Y \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ BX = Y\}$$

Par suite, il vient :

$$\left(Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(A) \right) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ BX = Y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \text{Le système de représentation} \\ \text{matricielle } (B|Y) \\ \text{est compatible} \end{array} \right)$$

On procède alors à un échelonnement en lignes du système de représentation matricelle $(B|Y)$ pour en déterminer les équations de compatibilités.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & y_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & y_4 \end{array} \right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_4 \end{array} \right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_4 \end{array} \right)$$

Ce système présente une équation de compatibilité qui est $-y_1 + y_4 = 0$.
Par suite, on en déduit que :

$$\mathrm{Im}\,(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ -y_1 + y_4 = 0 \right\}$$

On peut par ailleurs chercher une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(A)$:

$$\left(Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(A) \right) \quad \Leftrightarrow \quad (-y_1 + y_4 = 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (y_1 = y_4)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lclll} y_1 & = & & & y_4 \\ y_2 & = & y_2 & & \\ y_3 & = & & y_3 & \\ y_4 & = & & & y_4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(Y \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$$

et par suite on a : $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.