Exercice| [3386] | 1| Inverse par échelonnement

Déterminer les inverses des matrices :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

— Pour chaque matrice, on procèdera à un échelonnement réduit en lignes de la matrice augmentée $(A|\mathrm{I}_3)$ en s'assurant le moment venu de l'inversibilité de la matrice, pour obtenir ensuite son inverse.

Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 1\end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 1\end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_3\\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & -6 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3\\ L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2\\ L_3 \leftarrow 3L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3\end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$