Exercice| [3385] | 1| Polynômes de matrices et inversibilité

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis vérifier que $A^2 = A + 2\mathrm{I}_3$. En déduire que A est inversible.

Pistes de réflexion

- On évalue donc A^2 et $A + 2\mathrm{I}_3$.
- On utilise ensuite l'expression précédente de sorte à obtenir une écriture de la forme $A \times B = \mathrm{I}_3$ qui donnera le caracère inversible à droite de A, et son inverse qui sera B, que l'on explicitera ensuite.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A + 2\mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

On a alors que $A^2 - A = 2\mathrm{I}_3$, ce qui donne que $A \times \frac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$.

par suite, la matrice A est inversible à droite, donc inversible, et d'inverse la matrice $\frac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3)$.

Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2}(A - \mathrm{I}_3) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$