Exercice| [3381] | 1| Déterminer l'image d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Décrire $\operatorname{Im}(A)$ à l'aide d'équations.

Pistes de réflexion

- On sait que $B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient à $\operatorname{Im}(A)$ si, et seulement si, le système de représentation matricielle $(A|B)$ est compatible.
- On essaiera donc d'extraire les relations de compatibilité de ce système pour identifier des équations que doit vérifier une matrice colonne $B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour que ce système soit compatible.

Éléments de correction

Par définition : $\operatorname{Im}(A) = \{B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R}),\ AX = B\}$

Par suite, en notant $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} (B \in \operatorname{Im}(A)) &\Leftrightarrow (\exists X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R}),\ AX = B) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Le système de représentation} \\ \text{matricielle } (A|B) \text{ est compatible}\end{array}\right) \end{aligned}$$

On échelonne alors en ligne le système de représentation matricielle $(A|B)$ pour en déterminer les équations de compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & 5 & b_1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & b_3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -2 & b_3 - b_1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 \end{array}\right)$$

Ce système présente une équation de compatibilité qui est $b_3 - b_2 = 0$.

Ainsi, on a : $\operatorname{Im}(A) = \left\{ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ b_3 - b_2 = 0 \right\}$

Par ailleurs, on peut en déduire de plus que :

$$\begin{aligned} \left(B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(A) \right) &\Leftrightarrow (b_3 - b_2 = 0) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccll} b_1 & = & b_1 & \\ b_2 & = & & b_2 \\ b_3 & = & & b_2 \end{array} \right., (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \left(B \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \end{aligned}$$

et donc que : $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.