Exercice| [3380] | 1| Recherche d'un noyau

Déterminer le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Pistes de réflexion

— On sait que $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient à $ker(A)$ si, et seulement si, $AX = (0)$.

— Par suite, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution du système de représentation matricielle $(A|0)$.

Éléments de correction

Par définition : $\quad \mathrm{Ker}\,(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0\}$.

Ainsi, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on a : $\quad (X \in \mathrm{Ker}\,(A)) \Leftrightarrow (AX = (0))$

$\Leftrightarrow$ ((x_1, x_2, x_3) est solution du système de représentation matricielle $(A|0)$)

On résout par échelonnement en lignes le système de représentation matricielle $(A|0)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit alors que :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{4}{3}x_3 \end{cases},\ x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{4}{3}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right)$$

Ainsi, on a : $\quad \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

ou encore : $\quad \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.