

Exercice [3378] | 1 | Expression analytique

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression analytique de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A , puis calculer l'image du vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pistes de réflexion

- Il suffit d'expliciter l'image par l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ d'une matrice colonne X quelconque, pour obtenir l'expression d'une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 .
- On évalue ensuite l'image de la matrice colonne proposée à l'aide de l'expression trouvée.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x + y - z \\ 2x + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par suite, l'expression analytique de l'application linéaire canoniquement associée à A est :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x + y - z, 2x + z) \end{array}$$

Par suite l'image du vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est :

$$\begin{aligned} f(1, -2, 1) &= (3 \times 1 + (-2) - 1, 2 \times 1 + 1) \\ &= (0, 3) \end{aligned}$$