

Exercice [3377] | 1 | Exploiter le caractère linéaire

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{matrix}$ .

Calculer  $f(X_1)$  et  $f(X_2)$  où  $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , puis  $f(3X_1 - 2X_2)$ .

Pistes de réflexion

- On calcule les deux produits matriciels correspondant aux deux calculs d'images.
- Puis on utilise le caractère linéaire de  $f$  pour le troisième calcul d'image.

Éléments de correction

$$\begin{aligned} \text{Des calculs directs donnent que : } f(X_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 2 \\ (-1) \times (-1) + 1 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } f(X_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 2 \\ (-1) \times 3 + 1 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par suite, par linéarité de  $f$ , il vient :

$$\begin{aligned} f(3X_1 - 2X_2) &= 3f(X_1) - 2f(X_2) \\ &= 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 - 14 \\ 9 - (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$