Exercice| [3372] | 1| Manipuler le binôme de Newton

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 puis $(A + 2I_3)^4$.

Pistes de réflexion

— On effectuera le calcul de A^2 et de A^3 pour s'apercevoir que $A^3 = (0)$.
— On appliquera alors le binôme de Newton pour calculer $(A + 2\mathrm{I}_3)^4$, en remarquant que certains termes sont nuls.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par suite, on a :
$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \times A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il est immédiat que $A \times 2\mathrm{I}_3 = 2\mathrm{I}_3 \times A$, et par suite d'près la formule du binôme de Newton, il vient :

$$\begin{aligned} (A + 2\mathrm{I}_3)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} A^k \, (2\mathrm{I}_3)^{4-k} \\ &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} A^k \times 2^{4-k} \mathrm{I}_3 \\ &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 2^{4-k} A^k \\ &= \binom{4}{0} 2^4 \underbrace{A^0}_{=\mathrm{I}_3} + \binom{4}{1} 2^3 A^1 + \binom{4}{2} 2^2 A^2 + \binom{4}{3} 2^1 \underbrace{A^3}_{=(0)} + \binom{4}{4} 2^0 \underbrace{A^4}_{=(0)} \\ &= 16\mathrm{I}_3 + 4 \times 8A + 6 \times 4A^2 \\ &= 16 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 32 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 24 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 32 & 64 \\ 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 32 & 88 \\ 0 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$