## Exercice| [3245] | 1| Suites géométriques

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{n}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

**(1).** On considère alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général $v_n$ est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n\sqrt{2} - n.$$

**(a).** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on identifiera les éléments caractéristiques.

**(b).** En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$.

**(2).** Déduire des questions précédentes, une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**(3).** Que vaut alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ ?

## Pistes de réflexion

**(1).(a).** Trouver une relation du type $v_{n+1} = q \times v_n$ ou montrer que le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant.

**(b).** Mettre en oeuvre les formules du cours.

**(2).** On récupère l'expression de $u_n$ à l'aide de cette de $v_n$.

**(3).** C'est un calcul de somme qui fait intervenir deux sommes de références...

## Éléments de correction

**(1).(a).** On a directement que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} &= u_{n+1}\sqrt{2} - (n+1) \\ &= \left(\frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2} - (n+1) \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n}{2} + 1 - n - 1 \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n}{2} - n \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{u_n\sqrt{2}}{2} - \frac{n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(u_n\sqrt{2} - n\right) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Par suite, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terne $v_0 = u_0\sqrt{2} - 0$ c'est à dire $v_0 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

**(b).** On en déduit directement que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{\sqrt{2}}{3 \times 2^{n-1}}$

**(2).** Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n\sqrt{2} - n$, on en déduit que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{3 \times 2^{n-1}} + \dfrac{n}{\sqrt{2}}$.

**(3).** Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3 \times 2^{k-1}} + \frac{k}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n} k \\ &= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} + \frac{n(n+1)}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{n(n+1)\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} + \frac{n(n+1)\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$