Exercice| [3223] | 1| Combinaison linéaire de vecteurs

Vérifier que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est liée, puis déterminer une relation de dépendance entre les vecteurs de cette famille :

$$u_1 = (2, -1, 1, 2)\,, \quad u_2 = (1, 2, 1, 1)\,, \quad u_3 = (-1, -7, -2, -1) \quad \text{et} \quad u_4 = (0, -10, -2, 0)$$

Pistes de réflexion

- On s'assure du caractère lié de la famille en s'intéressant au rang de la matrice de la famille et en le comparant au nombre de vecteurs de cette dernière.
- Pour la relation de dépendance, on exploitera l'échelonnement précédent pour obtenir cette dernière.

Éléments de correction

La famille $\mathcal{F}$ étant une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$, par théorème elle est libre si, et seulement si, le rang de sa représentation matricielle $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -7 & -10 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est égal à 4.
Un échelonnement en lignes de sa matrice donne :
On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -7 & -10 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & -10 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & -10 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 2 pivots non nuls. Le rang de la matrice de la famille $\mathcal{F}$ est donc 2, et par suite, elle n'est pas libre donc elle est liée.
Il est alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ et tel que $\lambda u_1 + \lambda u_2 + \lambda u_3 + \lambda u_4 = \overrightarrow{0}$.
Cette relation se traduit par le fait que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ est solution du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -7 & -10 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$
En reprenant les calculs précédents et en poursuivant l'échelonnement il vient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{5}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{5}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit alors les relations $\begin{cases} \lambda_1 &= -1\lambda_3 - 2\lambda_4 \\ \lambda_2 &= 3\lambda_3 + 4\lambda_4 \end{cases}$ où $(\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2$
Par suite, il vient que $(-\lambda_3 - 2\lambda_4)\,u_1 + (3\lambda 3 + 4\lambda_4)\,u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = \overrightarrow{0}$.
En particulier pour $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 1$ il vient : $\quad -3u_1 + 7u_2 + u_3 + u_4 = \overrightarrow{0}$.