Exercice| [3189] | 1| Convergence d'une intégrale impropre

On souhaite déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

(1). Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ?

(2). Démontrer que : $\quad \forall t \in [0;+\infty[, \quad 0 \leq \ln(1+t) \leq t$.

En déduire un encadrement de $\dfrac{\ln(1+t)}{t\,(1+t^2)}$ pour $t \in [1;+\infty[$.

(3). Par la « méthode par calcul », déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(4). Conclure quant à la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

Pistes de réflexion

(1). On s'intéresse simplement au domaine de continuité pour la focntion $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t\,(1+t^2)}$.

(2). On peut par exemple étudier les variations de la fonction $g : t \longmapsto t - \ln(1+t)$ pour établir cette inégalité.

(3). On reconnaîtra notamment que la fonction $h : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto \arctan(t)$.

(4). On mobilisera le théorème de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives puisque les questions précédents donnent une fonction majorante dont l'intégrale converge sur l'intervalle considéré.

Éléments de correction

(1). La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t\,(1+t^2)}$ est continue sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

(2). Soit $g : t \longmapsto t - \ln(1+t)$. La fonction g est clairement continue et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, et on a : $\quad \forall t \in [0;+\infty[,$

$$\begin{aligned} g'(t) &= 1 - \frac{1}{1+t} \\ &= \frac{1+t-1}{1+t} \\ &= \frac{t}{1+t} \end{aligned}$$

et l'on a clairement sur $[0;+\infty[$ que : $\quad (g'(t) > 0) \quad \Leftrightarrow \quad (t > 0)$

ainsi que sur $[0;+\infty[$: $\quad (g'(t) = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (t = 0)$.

Par suite, on en déduit les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$:

t	0		$+\infty$
Signe de $g'(t)$	0	$+$	
Variations de g	$g(0) = 0$	$\nearrow$	

Par conséquent, la fonction g étant croissante sur $[0;+\infty[$, elle est minorée par sa valeur en 0, ce qui donne que : $\quad \forall t \in [0;+\infty[,\ g(t) \geq 0$, c'est à dire : $\quad \ln(1+t) \leq t$.

Par aileurs, puisque : $\quad \forall t \in [0;+\infty[,\ 1 \leq 1+t$

par croissance de la fonction logarithme népérien sur $[0;+\infty[$ il vient que : $\quad \forall t \in [0;+\infty[,\ \underbrace{\ln(1)}_{=0} \leq \ln(1+t)$.

Finalement, on a bien que : $\quad \forall t \in [0;+\infty[,\ 0 \leq \ln(1+t) \leq t$.

Par ailleurs, puisque : $\quad \forall t \in [1;+\infty[,\ t\left(1+t^2\right) > 0$

il vient que : $\quad \forall t \in [1;+\infty[,\ 0 \leq f(t) \leq \underbrace{\dfrac{t}{t\,(1+t^2)}}_{=\frac{1}{1+t^2}}$.

(3). La fonction $h : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Soit $A \geq 0$. On a directement que :

$$\begin{aligned} \int_1^{A} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= [\arctan(t)]_1^A \\ &= \arctan(A) - \arctan(1) \\ &= \underbrace{\arctan(A)}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

et par conséquent, on a : $\quad \displaystyle\int_0^{A} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et on a : $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

(4). On a donc :

— $\forall t \in [1;+\infty[,\ 0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente

donc par le théorème de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.