Exercice| [3124] | 1| Systèmes linéaires

Pour chacun des deux systèmes suivants donnés sous leur forme matricielle, déterminer leur rang, leur comptabilité et lorsque c'est le cas l'ensemble de leur(s) solution(s).

$$\mathcal{S}_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Éléments de correction

Résolution du système $\mathcal{S}_1$: On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{4}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{10} \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
Il ya toutefois une équation de compatibilité de la forme :

$$\left\{ 0 = \frac{11}{10} \right.$$

et par suite le système n'est pas compatible. Ainsi l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}_1$ est l'ensemble vide $\varnothing$.

Résolution du système $\mathcal{S}_2$: On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 2 pivots non nuls. Le rang du système est donc 2.
Le système présente une équation de compatibilité :

$$\left\{ 0 = 0 \right. \qquad \text{Relation vérifiée}$$

Le système est compatible et on poursuit l'échelonnement.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \ldots, x_4$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x_1 = 0 - \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{3}{2}x_4 \\ x_2 = -1 - \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \end{cases} \quad \text{où } (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2$$

et par suite l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}_2$ est : $\left\{ \left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4, -1 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, x_3, x_4 \right), (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.