Exercice| [3107] | 1| Manipuler le théorème de la limite monotone

(1). Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $u_n = 1 - \dfrac{n}{n+1}$.

(2). Peut-on affirmer qu'elle converge ?

Pistes de réflexion

(1). On étudiera le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour donner les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

(1). Les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{n+1}{n+2} - 1 + \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

et par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(2). Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n}{n+1} \leq 1$

Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0.$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et sa limite est nécessairement plus grande que le minorant trouvé, à savoir 0.