Exercice| [3105] | 1| Manipuler le théorème d'encadrement

Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on donne le terme général ci-dessous :

$$u_n = \frac{n}{n+1}\mathrm{e}^{-n}$$

$$u_n = \frac{n+1}{n}\ln(n)$$

$$u_n = (-1)^n n\mathrm{e}^{-n}$$

Pistes de réflexion

(1). On factorisera le numérateur et le dénominateur du quotient par leur terme prépondérant, à savoir n, pour lever l'indéterminée.

(2). On factorisera le numérateur et le dénominateur du quotient par leur terme prépondérant, à savoir n, pour lever l'indéterminée.

(3). On pourra s'intéresser à $|u_n|$ et mobiliser un résultat sur les croissances comparées.

Éléments de correction

(1). Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$u_n = \frac{n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\mathrm{e}^{-n} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\mathrm{e}^{-n}.$$

Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Comme $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par produit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(2). Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$u_n = \frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n}\ln(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n).$$

Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $1+\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Comme $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit par produit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(3). Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = n\mathrm{e}^{-n}$.

Par croissances comparées, on sait que $n\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par théorème $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.