Exercice| [3045] | 1| Sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{l} x = 2\alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\alpha \end{array} \right. \right\}$$

(1). Vérifier que le vecteur $(2, 1, -1)$ appartient à F.

(2). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(3). Déterminer une famille génératrice de F.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de s'assurer que le vecteur vérifie la caractérisation des éléments de F, à savoir ici s'assurer que ses composantes peuvent s'obtenir à l'aide de deux réels que l'on identifiera.

(2). On mobilisera la propriété caractérisant les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ en établissant notamment la stabilité par combinaison linéaire.

(3). On essaiera d'exprimer un vecteur quelconque de F comme combinaison linéaire de plusieurs vecteurs dont on vérifiera l'appartenance à F.

Éléments de correction

(1). Par définition de F, on a :

$$\begin{array}{rcl} ((1, 1, -1) \in F) & \Leftrightarrow & \left(\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{l} 2 = 2\alpha - \beta \\ 1 = \alpha + \beta \\ -1 = -\alpha \end{array} \right. \right) \\ & \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} \text{Le système de} \\ \text{représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ \text{est compatible} \end{array} \right) \end{array}$$

Un échelonnement en lignes de dernier donne :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \underset{L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La dernière ligne donne une équation de compatibilité de la forme « $0 = 0$ », ce qui assure la compatibilité du système.
Par suite, le vecteur $(2, 1, -1)$ est bien un élément de F.
On peut poursuivre cet échelonnement de sorte à obtenir le couple (α, β) recherché :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ce qui permet d'obtenir que $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{array} \right.$ et par suite que $\left\{ \begin{array}{l} 2 = 2 \times 1 - 0 \\ 1 = 1 + 0 \\ -1 = -1 \times 1 + 0 \end{array} \right.$.

(2). **F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:** c'est le cas par définition de F.

$\overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$ est un élément de F : en effet, en écrivant que $\left\{ \begin{array}{l} 0 = 2 \times 0 - 0 \\ 0 = 0 + 0 \\ 0 = -1 \times 0 \end{array} \right.$ on a bien que $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0) \in F$ puisque satisfaisant à la caractérisation de F avec le couple $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $u = (x, y, z) \in F$, $v = (x', y,', z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On pose $w = \lambda u + v$ avec $w = (x'', y'', z'')$.
Montrons que $w \in F$, c'est à dire qu'il existe $(\alpha'', \beta'') \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = 2\alpha'' - \beta'' \\ y'' = \alpha'' + \beta'' \\ z'' = -\alpha'' \end{array} \right. .$$

Par définition de w, on a donc que : $\left\{ \begin{array}{l} x'' = \lambda x + x' \\ y'' = \lambda y + y' \\ z'' = \lambda z + z' \end{array} \right.$.

Or $u \in F$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} x = 2\alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\alpha \end{array} \right.$.

De même $v \in F$ donc il existe $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} x' = 2\alpha' - \beta' \\ y' = \alpha' + \beta' \\ z' = -\alpha' \end{array} \right.$.

Par suite, on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} x'' & = & \lambda x + x' \\ & = & \lambda\,(2\alpha - \beta) + 2\alpha' - \beta' \\ & = & 2\,(\lambda\alpha + \alpha') - \lambda\beta - \beta' \\ & = & 2\,(\lambda\alpha + \alpha') - (\lambda\beta + \beta') \\ y'' & = & \lambda y + y' \\ & = & \lambda\,(\alpha + \beta) + \alpha' + \beta' \\ & = & \lambda\alpha + \alpha' + \lambda\beta + \beta' \\ z'' & = & \lambda z + z' \\ & = & \lambda\,(-\alpha) + (-\alpha') \\ & = & -\,(\lambda\alpha + \alpha') \end{array}$$

Ainsi, en posant $\alpha'' = \lambda\alpha + \alpha'$ et $\beta'' = \lambda\beta + \beta'$, on a bien $\left\{ \begin{array}{l} x'' = 2\alpha'' - \beta'' \\ y'' = \alpha'' + \beta'' \\ z'' = -\alpha'' \end{array} \right.$, ce qui signifie que $w \in F$.

Conclusion : F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(3). Par définition de F, on a :

$$\begin{array}{rcl} (u = (x, y, z) \in F) & \Leftrightarrow & \left(\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{l} x = 2\alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\alpha \end{array} \right. \right) \\ & \Leftrightarrow & \left(\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) = \alpha\,(2, 1, -1) + \beta\,(-1, 1, 0) \right) \\ & \Leftrightarrow & \left(u \in \mathrm{Vect}\left((2, 1, -1), (-1, 1, 0) \right) \right) \end{array}$$

et par suite on en déduit que $F = \mathrm{Vect}\left((2, 1, -1), (-1, 1, 0) \right)$ ce qui nous donne une famille génértrice de F.