Exercice [3008] 1 Sommes téléscopiques

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2+k-2}{(k+3)^2}\right)$.

Pistes de réflexion

— On commencera par factoriser au mieux le quotient $\frac{k^2+k-2}{(k+3)^2}$ de sorte à pouvoir utiliser au maximum la propriété fondamentale du logarithme.
— On fera alors apparaître par linéarité du symbole $\sum$, des sommes téléscopiques à l'aide de changements d'indices.

Éléments de correction

On remarque que : $\forall k \in [\![2;n]\!],\ k^2+k-2 = (k-1)(k+2)$

Par suite, il vient que : $\forall k \in [\![2;n]\!],\ \ln\left(\frac{k^2+k-2}{(k+3)^2}\right) = \ln(k-1) + \ln(k+2) - 2\ln(k+3)$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+2) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k+3) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \ln(i) + \sum_{j=4}^{n+2} \ln(j) - 2\sum_{\ell=5}^{n+3} \ln(\ell) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) + \sum_{k=4}^{n+2} \ln(k) - 2\sum_{k=5}^{n+3} \ln(k) \\
&= \underbrace{\sum_{k=5}^{n} \ln(k) + \sum_{k=5}^{n} \ln(k) - 2\sum_{k=5}^{n} \ln(k)}_{=0} + \underbrace{\ln(1)+\ln(2)+\ln(3)+\ln(4)}_{\text{Termes restants issus de la 1e somme}} \\
&\quad \underbrace{+\ln(4)+\ln(n+1)+\ln(n+2)}_{\text{Termes restants issus de la 2e somme}} \underbrace{-2(\ln(n+1)+\ln(n+2)+\ln(n+3))}_{\text{Termes restants issus de la 3e somme}} \\
&= \ln(2) + \ln(3) + 2\ln(4) - \ln(n+1) - 2\ln(n+2) - 2\ln(n+3)
\end{aligned}$$