Exercice| [3002] | 1| Calculs de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{3k-1}$.

Pistes de réflexion

- On devra penser à réinvestir la formule du binôme de Newton pour calculer cette somme.
- On n'oubliera pas de gérer la plage d'indexation de cette somme pour utiliser les formules de sommes usuelles.

Éléments de correction

On commence par remarquer que : $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^{3k-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(2^3\right)^k \times \frac{1}{3}$.

Par suite, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 8^k \\
&= \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 8^k \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \\
&= \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 8^k 1^{n-k} - \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 8^k 1^{n-k} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[(8+1)^n - \binom{n}{0} 8^0 \times 1^8 - \binom{n}{1} 8^1 \times 1^7 \right] \\
&= \frac{1}{3} \left(9^n - 1 - 8n\right)
\end{aligned}$$