Exercice| [2997] | 1| Manipuler les factorielles et les coefficients du binôme

(1). Calculer $\binom{30}{2}$ et $\binom{30}{29}$.

(2). Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $A = \dfrac{n+2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

Pistes de réflexion

(1). On mettra simplement en forme les formules donnant les coefficients du binôme en simplifiant de façon pertinente les différentes écritures de factorielles.

(2). On remarquera avant de procéder à un réduction au même dénominateur que $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

Éléments de correction

(1). On a directement que :

$$\begin{aligned}
\binom{30}{2} &= \frac{30!}{2! \times (30-2)!} \\
&= \frac{30!}{2! \times 28!} \\
&= \frac{30 \times 29 \times 28!}{2!28!} \\
&= \frac{30 \times 29}{2!} \\
&= \frac{30 \times 29}{2} \\
&= 15 \times 29 \\
&= 435
\end{aligned}$$

En remarquant que $\binom{30}{29} = \binom{30}{30-1}$ on en déduit que $\binom{30}{29} = \frac{30}{1}$ c'est à dire que $\binom{30}{29} = 30$.

(2). En remarquant que $(n+1)! = (n+1) \times n!$ on a :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\
&= \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1) \times n!} \\
&= \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} \\
&= \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$