Exercice| [2994] | 1| Binôme de Newton

Pour $x \in \mathbb{R}$, développez, puis réduire les expressions suivantes à l'aide du binôme de Newton :

(1). $A = (x-2)^5$

(2). $B = \left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)^6$

Pistes de réflexion

— On explicitera la formule du binôme de Newton en identifiant notamment dans le triangle de Pascal, les valeurs des coefficients binomiaux qui interviennent dans le développement.

Éléments de correction

(1).
$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k}(-2)^k \\
&= \binom{5}{0} \times x^5 \times (-2)^0 + \binom{5}{1} \times x^4 \times (-2)^1 + \binom{5}{2} \times x^3 \times (-2)^2 \\
&\quad + \binom{5}{3} \times x^2 \times (-2)^3 + \binom{5}{4} \times x^1 \times (-2)^4 + \binom{5}{5} \times x^0 \times (-2)^5 \\
&= 1 \times x^5 \times (-2)^0 + 5 \times x^4 \times (-2)^1 + 10 \times x^3 \times (-2)^2 \\
&\quad + 10 \times x^2 \times (-2)^3 + 5 \times x^1 \times (-2)^4 + 1 \times x^0 \times (-2)^5 \\
&= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32
\end{aligned}$$

(2).
$$\begin{aligned}
B &= \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^{6-k} \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^k \\
&= \binom{6}{0} \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^6 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^0 + \binom{6}{1} \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^5 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^1 + \binom{6}{2} \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^4 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^2 \\
&\quad + \binom{6}{3} \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^3 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^3 + \binom{6}{4} \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^4 + \binom{6}{5} \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^1 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^5 \\
&\quad + \binom{6}{6} \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^0 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^6 \\
&= 1 \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^6 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^0 + 6 \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^5 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^1 + 15 \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^4 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^2 \\
&\quad + 20 \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^3 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^3 + 15 \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^4 + 6 \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^1 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^5 \\
&\quad + 1 \times \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^0 \times \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^6 \\
&= 1 \times \mathrm{e}^{\,6x} + 6 \times \mathrm{e}^{\,4x} + 15 \times \mathrm{e}^{\,2x} + 20 \times \mathrm{e}^{\,0} + 15 \times \mathrm{e}^{\,-2x} + 6 \times \mathrm{e}\,{-4x} + 1 \times \mathrm{e}^{\,-6x} \\
&= \mathrm{e}^{\,6x} + 6\mathrm{e}^{\,4x} + 15\mathrm{e}^{\,2x} + 20 + 15\mathrm{e}^{\,-2x} + 6\mathrm{e}^{\,-4x} + \mathrm{e}^{\,-6x}
\end{aligned}$$