

Exercice [2979] | 1 | Calcul de somme finie

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . On admet que :  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

Exprimer en fonction de  $n$  la somme  $S = \sum_{k=4}^{2n} (k^2 - (2k-1)^2)$ .

Pistes de réflexion

- On pourra au préalable développer l'expression  $k^2 - (2k-1)^2$  puis décomposer la somme à calculer à l'aide de sommes de références.
- On n'oubliera pas de gérer si nécessaire la plage d'indexation avant d'appliquer les formules de sommes usuelles.

Éléments de correction

Dans un premier temps, on a :  $\forall k \in \llbracket 4; 2n \rrbracket, \quad k^2 - (2k-1)^2 = k^2 - (4k^2 - 4k + 1)$   
 $= k^2 - 4k^2 + 4k - 1$   
 $= -3k^2 + 4k - 1$

Pour obtenir ainsi :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=4}^{2n} (-3k^2 + 4k - 1) \\ &= -3 \sum_{k=4}^{2n} k^2 + 4 \sum_{k=4}^{2n} k - \sum_{k=4}^{2n} 1 \\ &= -3 \left[ \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^3 k^2 \right] + 4 \left[ \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^3 k \right] - 1 \times \underbrace{(2n - 4 + 1)}_{\substack{\text{Nombre de termes} \\ \text{de la somme}}} \\ &= -3 \left[ \frac{2n \times (2n+1) \times (2(2n+1)+1)}{6} - \frac{3 \times 4 \times 7}{6} \right] \\ &\quad + 4 \left[ \frac{2n \times (2n+1)}{2} - \frac{3 \times 4}{2} \right] - (2n - 3) \\ &= -3 \left[ \frac{2n(2n+1)(4n+3)}{6} - 14 \right] + 4[n(2n+1) - 6] - 2n + 3 \\ &= -3 \left[ \frac{n(2n+1)(4n+3)}{3} - 14 \right] + 4[n(2n+1) - 6] - 2n + 3 \\ &= -n(2n+1)(4n+3) + 42 + 4n(2n+1) - 24 - 2n + 3 \\ &= n(2n+1)[4 - (4n+3)] - 2n + 21 \\ &= n(2n+1)[1 - 4n] - 2n + 21 \end{aligned}$$