Exercice| [2977] | 1| Calcul de somme finie

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Exprimer en fonction de n la somme $S = \sum_{k=3}^{2n} \left(2^{3k+1} \times \frac{3^{k+1}}{4^k} \right)$.

Pistes de réflexion

— Transformer l'expression de sorte à faire intervenir $\sum_{k=0}^{n} q^k$.

— Il ne faudra pas oublier de gérer la plage d'indexation avant d'utiliser la formule donnant la somme précédente.

Éléments de correction

On a directement que : $\forall k \in [\![3; 2n]\!]$,

$$\begin{aligned} 2^{3k+1} \times \frac{3^{k+1}}{4^k} &= \left(2^3\right)^k \times 2 \times \frac{3^k \times 3}{4^k} \\ &= 6 \times \frac{8^k \times 3^k}{4^k} \\ &= 6 \times \left(\frac{8 \times 3}{4} \right)^k \\ &= 6 \times 6^k \end{aligned}$$

Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=3}^{2n} 6 \times 6^k \\ &= 6 \sum_{k=3}^{2n} 6^k \\ &= 6 \left[\sum_{k=0}^{2n} 6^k - \sum_{k=0}^{2} 6^k \right] \\ &= 6 \left[\frac{1 - 6^{2n+1}}{1-6} - \frac{1 - 6^{2+1}}{1-6} \right] \\ &= 6 \left[\frac{6^{2n+1} - 1}{5} + \frac{1 - 196}{5} \right] \\ &= 6 \times \frac{6^{2n+1} - 196}{5} \\ &= \frac{6 \times \left(6^{2n+1} - 196\right)}{5} \\ &= \frac{6^{2n+2} - 1176}{5} \end{aligned}$$