Exercice| [2975] | 1| Sous-espace engendré

On désigne par $\mathbb{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$\mathbb{F} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$

Déterminer trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 de $\mathbb{R}^4$ tels que $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\ (u_1, u_2, u_3)$.

Pistes de réflexion

— On traduira la relation définissant $\mathbb{F}$ sous forme d'un système linéaire dont on pourra alors exploiter les solutions pour proposer une famille génératrice de $\mathbb{F}$.

Éléments de correction

On a clairement que :

$$\begin{aligned}
((x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{F}) \quad & \Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0) \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & = & x_2 & & \\ x_3 & = & & x_3 & \\ x_4 & = & & & x_4 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad ((x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\,(-1, 1, 0, 0) + x_3\,(-1, 0, 1, 0) + x_4\,(-1, 0, 0, 1)) \\
& \Leftrightarrow \quad ((x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{Vect}\ ((-1, 1, 0, 0)\,, (-1, 0, 1, 0)\,, (-1, 0, 0, 1)))
\end{aligned}$$

En conclusion on a $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\ ((-1, 1, 0, 0)\,, (-1, 0, 1, 0)\,, (-1, 0, 0, 1))$.