Exercice| [2974] | 1| Liberté d'une famille

La famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_3)$ avec $u_1 = (3,0,3,-1)$, $u_2 = (-1,2,-3,0)$ et $u_3 = (2,1,5,1)$ est-elle libre ?

Pistes de réflexion

- On utilise la représentation matricielle de cette famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ pour en étudier la liberté.
- Par théorème, cette famille sera une base si, et seulement si, sa matrice est de rang 3 puisqu'il s'agit d'une famille de 3 vecteurs.

Éléments de correction

Par théorème, $\mathcal{F}$ étant une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$, elle formera une famille libre de $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, la matrice de cette famille de vecteurs est de rang 3.

Par définition de la famille $\mathcal{F}$, sa matrice est donc $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On recherche alors le rang de cette matrice par échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{6}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{11}{6} \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{11}{24}L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3, et par suite, la famille $\mathcal{F}$ est bien une famille libre de $\mathbb{R}^4$.