Exercice| [2973] | 1| Relation de dépendance

On a écrit ci-dessous les matrices de familles $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Dans chaque cas :

(1). identifier p, n et les vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ de $\mathcal{F}$;

(2). s'assurer qu'il s'agit d'une famille liée ;

(3). écrire une relation de dépendance entre les vecteurs u_1, u_2,…,u_p.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 14 & 4 & -14 \\ -2 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Éléments de correction

(1). La famille $\mathcal{F}_1$ est formée des 3 vecteurs $u_1 = (2, -3)$, $u_2 = (4, 5)$ et $u_3 = (2, 3)$ tous éléments de $\mathbb{R}^2$.
Cette famille ne peut pas être libre puisqu'il s'agit d'une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Elle est donc liée, et par suite, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \overrightarrow{0}$.
Le triplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_3)$ est solution du système homogène de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ que l'on résout par échelonnement.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2} L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{11} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -\frac{2}{11} & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{11} L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & 0 \end{array}\right)$$

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_3$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & 0 + \dfrac{1}{11} \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & 0 - \dfrac{6}{11} \lambda_3 \end{cases} , \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Par suite, on en déduit que $\dfrac{1}{11} \lambda u_1 - \dfrac{6}{11} \lambda_3 u_2 + \lambda_3 u_3 = \overrightarrow{0}$ où $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

En particulier pour $\lambda_3 = 11$, il vient que $u_1 - 6u_2 + 6u_3 = \overrightarrow{0}$.

(2). La famille $\mathcal{F}_2$ est formée des 4 vecteurs $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (3, 2, -4)$, $u_3 = (1, 5, -1)$ et $u_4 = (2, 4, 0)$ tous éléments de $\mathbb{R}^3$.
Cette famille ne peut pas être libre puisqu'il s'agit d'une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Elle est donc liée, et par suite, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = \overrightarrow{0}$.
Le 4−uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ est solution du système homogène de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ que l'on résout par échelonnement.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{3} L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & \frac{14}{3} & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{4} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{4} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{4}{3} L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{32}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 \end{array}\right)$$

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & 0 - \dfrac{32}{3} \lambda_4 \\ \lambda_2 & = & 0 + 2\lambda_4 \\ \lambda_3 & = & 0 + \dfrac{8}{3} \lambda_4 \end{cases} , \quad \lambda_4 \in \mathbb{R}$$

Par suite, on en déduit que : $-\dfrac{32}{3} \lambda_4 u_1 + 2\lambda_4 u_2 + \dfrac{8}{3} \lambda_4 u_3 + \lambda_4 u_4 = \overrightarrow{0}$ où $\lambda_4 \in \mathbb{R}$

En particulier, pour $\lambda_4 = 3$, il vient $-32u_1 + 6u_2 + 8u_3 + 3u_4 = \overrightarrow{0}$.

(3). La famille $\mathcal{F}_3$ est formée des 3 vecteurs $u_1 = (2, 1, -2)$, $u_2 = (1, 3, 0)$ et $u_3 = (1, -7, -4)$ et $u_4 = (2, 4, 0)$ tous éléments de $\mathbb{R}^3$.
La famille $\mathcal{F}_3$ est alors une famille liée, si et seulement si, le système homogène de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ possède une autre solution que la solution triviale $(0, 0, 0)$.
On procède donc à l'échelonnement de ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{15}{2} & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{5} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -\frac{12}{5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{5} L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_3$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & 0 + \dfrac{6}{5} \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & 0 - \dfrac{2}{5} \lambda_3 \end{cases} , \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que : $\dfrac{6}{5}\lambda_3 u_1 - \dfrac{2}{5}\lambda_3 u_2 + \lambda_3 u_3 = \overrightarrow{0}$ où $\lambda_3 \in \mathbb{R}$

Et en particulier pour $\lambda_3 = 5$ il vient que $6u_1 - 2u_2 + 5u_3 = \overrightarrow{0}$.

(4). La famille $\mathcal{F}_4$ est formée des 4 vecteurs $u_1 = (1, 3, -2, -2)$, $u_2 = (5, 0, 14, 2)$ et $u_3 = (2, 1, 4, 0)$ et $u_4 = (-1, 7, -14, -6)$ tous éléments de $\mathbb{R}^4$.

La famille $\mathcal{F}_4$ est alors une famille liée, si et seulement si, le système homogène de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 14 & 4 & -14 \\ -2 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ possède une autre solution que la solution triviale $(0, 0, 0, 0)$.

On procède donc à l'échelonnement de ce système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ -2 & 14 & 4 & -14 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 24 & 8 & -16 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{8}{5}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{4}{5}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & -15 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{15}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ les inconnues du système, on en déduit les relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 - \dfrac{1}{3}\lambda_3 - \dfrac{7}{3}\lambda_4 \\ \lambda_2 & = & 0 - \dfrac{1}{3}\lambda_3 + \dfrac{2}{3}\lambda_4 \end{array} \right. \quad , \quad (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit donc que : $\left(-\dfrac{1}{3}\lambda_3 - \dfrac{7}{3}\lambda_4\right) u_1 + \left(-\dfrac{1}{3}\lambda_3 + \dfrac{2}{3}\lambda_4\right) u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = \overrightarrow{0}$

avec $(\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2$

En particulier pour $\lambda_3 = 3$ et $\lambda_4 = 3$ on a : $-8u_1 + u_2 + 3u_3 + 3u_4 = \overrightarrow{0}$.