Exercice| [2972] | 1| Liberté et caractère générateur d'une famille

On a écrit ci-dessous les matrices de familles $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Dans chaque cas :

(1). identifier p, n et les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathcal{F}$;

(2). étudier le caractère libre de la famille $\mathcal{F}$;

(3). étudier le caractère générateur de la famille $\mathcal{F}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

— La valeur de p correspond au nombre de vecteurs de la famille, donc ici au nombre de colonnes des matrices de ces familles de vecteurs, celle de n au nombre de lignes de chacune de ces matrices et les vecteurs u_i s'obtiennent en relevant les coefficients des colonnes de ces matrices.

— La liberté ou le caractère générateur de ces familles s'obtient en déterminant le rang de ces matrices de familles de vecteurs.

Éléments de correction

(1). La famille $\mathcal{F}_1$ est formée des 4 vecteurs $u_1 = (1, -1, 3, 4, 1)$, $u_2 = (0, 2, 2, 3, -1)$, $u_3 = (1, 0, 1, 2, 1)$ et $u_4 = (2, 1, 2, 3, -2)$ tous éléments de $\mathbb{R}^5$.

Cette famille $\mathcal{F}$ sera libre si, et seulement si, le rang du système homogène de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est égal à 4, et génératrice si, et seulement si, le rang de ce même système est de rang 5.

Compte-tenu de la dimension de la matrice de la famille de vecteurs, ce rang ne pourra pas valoir 5, et donc $\mathcal{F}_1$ n'est pas génératrice.

On procède donc à l'échelonnement de la matrice donnée, sans tenir compte du second membre, qui puisqu'étant nul, n'apportera rien sur la recherche du rang.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + \frac{1}{2}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{7}{6}L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 + \frac{1}{6}L_3}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_5 \leftarrow L_5 - \frac{11}{4}L_4}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 4 pivots non nuls. Le rang du système homogène associé à cette matrice est donc 4, et par suite la famille $\mathcal{F}_1$ est libre.

(2). La famille $\mathcal{F}_2$ est formée des 3 vecteurs $u_1 = (2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2, 1, 1, 3, 1)$, et $u_3 = (0, -1, 0, 3, 6, 2)$ tous éléments de $\mathbb{R}^6$.

Cette famille $\mathcal{F}_2$ sera libre si, et seulement si, le rang du système homogène de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est égal à 3, et génératrice si, et seulement si, le rang de ce même système est de rang 6.

Compte-tenu de la dimension de la matrice de la famille de vecteurs, ce rang ne pourra pas valoir 6, et donc $\mathcal{F}_1$ n'est pas génératrice.

On procède donc à l'échelonnement de la matrice donnée, sans tenir compte du second membre, qui puisqu'étant nul, n'apportera rien sur la recherche du rang.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 1L_1 \\ L_6 \leftarrow L_6 - \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2}L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 4L_2 \\ L_6 \leftarrow L_6 + \frac{1}{2}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 4L_3 \\ L_6 \leftarrow L_6 + 3L_3}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système homogène associé à cette matrice est donc 3, et par suite la famille $\mathcal{F}_1$ est libre.

(3). La famille $\mathcal{F}_3$ est formée des 4 vecteurs $u_1 = (3,0,1,2)$, $u_2 = (0,3,1,-1)$, $u_3 = (2,1,1,1)$ et $u_4 = (0,3,1,-1)$ tous éléments de $\mathbb{R}^4$.

Cette famille $\mathcal{F}_3$ sera libre si, et seulement si, le rang du système homogène de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est égal à 4, et génératrice si, et seulement si, le rang de ce même système est de rang 4.

On procède donc à l'échelonnement de la matrice donnée, sans tenir compte du second membre, qui puisqu'étant nul, n'apportera rien sur la recherche du rang.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{3}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 2 pivots non nuls. Le rang du système homogène associé à cette matrice est donc 2, et par suite la famille $\mathcal{F}_3$ est ni libre ni génératrice.

(4). La famille $\mathcal{F}_4$ est formée des 4 vecteurs $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,-1)$, $u_3 = (-2,2,2)$ et $u_4 = (-1,1-1)$ tous éléments de $\mathbb{R}^3$.

Cette famille $\mathcal{F}_4$ sera libre si, et seulement si, le rang du système homogène de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est égal à 4, et génératrice si, et seulement si, le rang de ce même système est de rang 3.

Compte-tenu de la dimension de la matrice de la famille de vecteurs, ce rang ne pourra pas valoir 4, et donc $\mathcal{F}_4$ n'est pas libre.

On procède donc à l'échelonnement de la matrice donnée, sans tenir compte du second membre, qui puisqu'étant nul, n'apportera rien sur la recherche du rang.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système homogène associé à cette matrice est donc 3, et par suite la famille $\mathcal{F}_4$ est pas libre mais génératrice.