Exercice| [2971] | 1| Liberté d'une famille obtenue par combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

On considère alors la famille $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_4)$ où : $\begin{cases} v_1 = 2u_1 + u_2 \\ v_2 = u_1 - 3u_2 \\ v_3 = u_4 \\ v_4 = u_2 - u_1 \end{cases}$.

La famille $\mathcal{G}$ est-elle encore une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

Pistes de réflexion

- On reviendra dans un premier temps à la définition de ce qu'est une famille libre, pour écrire une combinaison linéaire nulle portant sur les vecteurs $v_1, \ldots, v_4$.
- Cette dernière combinaison linéaire nulle portant sur les vecteurs d'une famille libre, on sait que tous les coefficients de cette dernière sont nécessairement nuls, et ainsi on pourra écrire un système portant sur ces coefficients, dont on montrera pour tous, la nullité, ce qui assurera la liberté de la famille $\mathcal{G}$.

Éléments de correction

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \overrightarrow{0}$.
Par définition des vecteurs $(v_1, \ldots, v_4)$, on a clairement que :

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 &= \lambda_1 (2u_1 + u_2) + \lambda_2 (u_1 - u_2) + \lambda_3 u_4 + \lambda_4 (u_2 - u_1) \\ &= (2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) u_1 + (\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_4) u_2 + \lambda_4 u_4 \end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que :

$$(2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) u_1 + (\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_4) u_2 + \lambda_4 u_4 = \overrightarrow{0}$$

relation que l'on peut compléter en :

$$(2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) u_1 + (\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_4) u_2 + 0.u_3 + \lambda_4 u_4 = \overrightarrow{0}$$

La famille $(u_1, \ldots, u_4)$ est par hypothèse libre. On en déduit donc par définition que :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Il vient ainsi que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4)$ sont solutions du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ qui est donc un système homogène de taille 3×3.
Un échelonnement en lignes permet d'en déterminer le rang :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, le système est de rang 3. Comme il s'agit d'un système de taille 3×3 de rang 3, ce dernier admet par théorème une unique solution. Or comme il s'agit d'un système homognène, le triplet $(0, 0, 0)$ est clairement solution. Par conséquent, on en déduit que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_4 = 0$.

On en déduit ainsi que $\lambda_3 v_3 = \overrightarrow{0}$, et comme $v_3 \neq \overrightarrow{0}$, il vient que $\lambda_3 = 0$.

Par conséquent, on a bien $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$ ce qui assure le caractère libre de la famille $(v_1, \ldots, v_4)$.