Exercice| [2970] | 1| Sous-espace engendré

Le vecteur $u = (-2, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ appartient-il au sous-espace $\mathbb{F} = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, 0, 2)$ et $v_3 = (-1, 1, -1, 1)$?

Pistes de réflexion

— On commence par traduire l'appartenance de u à $\mathbb{F}$ à l'aide de la définition : u doit pouvoir s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2 et v_3.

— Cela se traduit donc par la recherche de la compatibilité d'un système, dont la matrice est clairement celle de la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_3)$ et le second membre le vecteur u.

Éléments de correction

Par définition :

$$\begin{aligned}(u \in \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3)) &\Leftrightarrow \left(\exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = u\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Le système de représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{est compatible}\end{array}\right)\end{aligned}$$

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

La dernière ligne de cet échelonnement donne une équation de compatibilité de la forme « $0 = -2$ » qui n'est donc clairement pas possible.
Par suite, ce système est incompatible, et par conséquent, $u \notin \mathbb{F}$.