Exercice| [0293] | 1| Forme algébrique d'un complexe

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(1). $z_1 = \dfrac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$

(2). $z_2 = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 + \dfrac{1-7\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$

(3). $z_3 = \dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

Pistes de réflexion

— On mobilisera toutes les règles opératoires sur les nombres complexes en se souvenant que $\mathrm{i}^2 = -1$.

— Par ailleurs, on transforme les expressions du type $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}\,b}$ en utilisant le conjugué du complexe $a+\mathrm{i}\,b$: $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}\,b} = \dfrac{a-\mathrm{i}\,b}{(a+\mathrm{i}\,b)(a-\mathrm{i}\,b)}$.

Éléments de correction

(1).
$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} \\ &= \frac{(3+6\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} \\ &= \frac{9+12\mathrm{i}+18\mathrm{i}+24\mathrm{i}^2}{3^2+4^2} \\ &= \frac{9+30\mathrm{i}-24}{25} \\ &= \frac{-15+30\mathrm{i}}{25} \\ &= -\frac{15}{25}+\frac{30}{25}\mathrm{i} \\ &= -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i} \end{aligned}$$

(2).
$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 + \frac{1-7\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} \\ &= \frac{(1+\mathrm{i})^2}{(2-\mathrm{i})^2} + \frac{(1-7\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})}{(4+3\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})} \\ &= \frac{1+2\times 1\times \mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{4-2\times 2\times \mathrm{i}+\mathrm{i}^2} + \frac{4-3\mathrm{i}-28\mathrm{i}+21\mathrm{i}^2}{4^3+3^2} \\ &= \frac{2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} + \frac{-17\mathrm{i}-31\mathrm{i}}{25} \\ &= \frac{2\mathrm{i}(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} - \frac{17}{25} - \frac{31}{25}\mathrm{i} \\ &= \frac{6\mathrm{i}+8\mathrm{i}^2}{3^2+4^3} - \frac{17}{25} - \frac{31}{25}\mathrm{i} \\ &= \frac{-8+6\mathrm{i}}{25} - \frac{17}{25} - \frac{31}{25}\mathrm{i} \\ &= -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}\mathrm{i} - \frac{17}{25} - \frac{31}{25}\mathrm{i} \\ &= -\frac{25}{25} - \frac{25}{25}\mathrm{i} \\ &= -1-\mathrm{i} \end{aligned}$$

(3).
$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\ &= \frac{(2+5\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} + \frac{(2-5\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} \\ &= \frac{2+2\mathrm{i}+5\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2}{1^2+1^2} + \frac{2-2\mathrm{i}-5\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2}{1^2+1^2} \\ &= \frac{2+7\mathrm{i}-5}{2} + \frac{2-7\mathrm{i}-5}{2} \\ &= \frac{-3+7\mathrm{i}}{2} + \frac{-3-7\mathrm{i}}{2} \\ &= -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\mathrm{i} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2}\mathrm{i} \\ &= -3 \end{aligned}$$