Exercice| [2917] | 1| Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application f donnée par : $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \longmapsto & M + (a+d)\mathrm{I}_2 \end{array} \right.$.

où I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer une base de l'image et du noyau de f.

(3). On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est stable par f, c'est à dire que : $\forall M \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}),\ f(M) \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

(2). On commencera par déterminer le noyau de f en traduisant sous forme d'un système portant sur les coefficients d'une matrice M quelconque le fait que son image par f doit être nulle. Par la suite, on mobilisera le théorème du rang pour obtenir la dimension de l'image, et chercher une base de son image.

(3). On déterminer l'image par f d'une matrice diagonale quelconque pour montrer qu'elle est encore diagonale.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ est une application} \\ \text{linéaire de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ f(\lambda M_1 + M_2) = \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array} \right)$$

Soient $\left\{ \begin{array}{rcl} M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & \in & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} & \in & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$ et posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$.

En notant $M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ on a par construction que : $\left\{ \begin{array}{rcl} a_3 & = & \lambda a_1 + a_2 \\ b_3 & = & \lambda b_1 + b_2 \\ c_3 & = & \lambda c_1 + c_2 \\ d_3 & = & \lambda d_1 + d_2 \end{array} \right.$

Montrons que $f(M_3) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$.
Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(M_3) & = & M_3 + (a_3 + d_3)\mathrm{I}_2 \\ & = & \lambda M_1 + M_2 + (\lambda a_1 + a_2 + \lambda d_1 + d_2)\mathrm{I}_2 \\ & = & \lambda M_1 + M_2 + (\lambda a_1 + \lambda d_1 + a_2 + d_2)\mathrm{I}_2 \\ & = & \lambda M_1 + M_2 + (\lambda a_1 + \lambda d_1)\mathrm{I}_2 + (a_2 + d_2)\mathrm{I}_2 \\ & = & \lambda M_1 + \lambda(a_1 + d_1)\mathrm{I}_2 + \underbrace{M_2 + (a_2 + d_2)\mathrm{I}_2}_{=f(M_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{(M_1 + (a_1 + d_1)\mathrm{I}_2)}_{=f(M_1)} + f(M_2) \\ & = & \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array}$$

Ainsi, f est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$. Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(M) & = & M + (a+d)\mathrm{I}_2 \\ & = & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2a+d & 0 \\ 0 & a+2d \end{pmatrix} \end{array}$$

et il est immédiat que $f(M) \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
Par suite, on en déduit que : $\forall M \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}),\ f(M) \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$
Ce qui signifie bien que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est stable par f.