Exercice| [2916] | 1| Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{a+d}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{b+c}{2}J \end{array} \right.$

où $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Déterminer l'image par f de la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour f ?

(3). Déterminer une base du noyau de f. Donner alors la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis en déduire le rang de f.

(4). On rappelle que la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est la famille $\mathcal{B}_c = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a). Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = \{f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)\}$.

(b). En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Pistes de réflexion

(1). On montrera le caractère linéaire de f en s'assurant que l'image d'un combinaison linéaire de vecteurs de l'ensemble de départ est la combinaison linéaire de leurs images.

(2). On pourra montrer que $f(M_1) = (0)$, ce qui assure le fait que $M_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.

(3). On déterminera les éléments du noyau en traduisant sous forme d'un système les conditions pour que l'image par f d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit nulle. On s'assurera que la famille génératrice ainsi obtenue est libre, pour en déduire une base et la dimension du noyau de f, et par suite, par le théorème du rang, en déduire le rang de f.

(4). (a). La non-liberté de la famille $\mathcal{F}$ viendra du fait que certains vecteurs la composant sont combinaison linéaire d'autres.

(b). On exploitera les relations de dépendance entre les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ et exploiter son caractère générateur de $\mathrm{Im}(f)$ et le fait que l'on connaît la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Éléments de correction

(1). Par théorème :

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ est une application} \\ \text{linéaire de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall (M_1, M_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ f(\lambda M_1 + M_2) = \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array}\right)$$

Soient $\left\{ \begin{array}{rcl} M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$ et posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$.

En notant $M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ on a par construction que : $\left\{ \begin{array}{rcl} a_3 & = & \lambda a_1 + a_2 \\ b_3 & = & \lambda b_1 + b_2 \\ c_3 & = & \lambda c_1 + c_2 \\ d_3 & = & \lambda d_1 + d_2 \end{array} \right.$

Montrons que $f(M_3) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$.

Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(M_3) & = & \dfrac{a_3+d_3}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{b_3+c_3}{2}J \\ & = & \dfrac{\lambda a_1 + a_2 + \lambda d_1 + d_2}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{\lambda b_1 + b_2 + \lambda c_1 + c_2}{2}J \\ & = & \dfrac{\lambda a_1 + \lambda d_1}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{a_2+d_2}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{\lambda b_1 + \lambda c_1}{2}J + \dfrac{b_2+c_2}{2}J \\ & = & \lambda\dfrac{a_1+d_1}{2}\mathrm{I}_2 + \lambda\dfrac{b_1+c_1}{2}J + \underbrace{\dfrac{a_2+d_2}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{b_2+c_2}{2}J}_{=f(M_2)} \\ & = & \lambda\underbrace{\left(\dfrac{a_1+d_1}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{b_1+c_1}{2}J\right)}_{=f(M_1)} + f(M_2) \\ & = & \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array}$$

Ainsi, f est bien une application linéaire de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} f(M_1) & = & \dfrac{1+(-1)}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{0+0}{2}J \\ & = & 0 \times \mathrm{I}_2 + 0 \times J \\ & = & (0) \end{array}$

et par suite, puisque $f(M_1) = (0)$, il vient par définition que $M_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.

(3). Par définition : $(M \in \mathrm{Ker}(A)) \Leftrightarrow (f(M) = (0))$

Ainsi, il vient :

$$\begin{array}{cl} & \left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)\right) \\ \Leftrightarrow & (f(M) = (0)) \\ \Leftrightarrow & \left(\dfrac{a+d}{2}\mathrm{I}_2 + \dfrac{b+c}{2}J = (0)\right) \\ = & \left(\begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a \quad\quad + d = 0 \\ \quad b + c \quad\quad = 0 \\ a \quad\quad + d = 0 \\ \quad b + c \quad\quad = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} (a,b,c,d) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle } (A|0) \end{array}\right) \end{array}$$

On procède alors à un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $(A|0)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit alors les relations :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & -d \\ b & = & -c \end{array} \right.$$

Par suite, il vient :

$$\begin{aligned} \left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f)\right) & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & -d \\ b & = & -c \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} a & = & & -d \\ b & = & -c & \\ c & = & c & \\ d & = & & d \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left(M \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de deux vecteurs non nuls et non colinéaires. Par théorème, elle est libre.

Par suite, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre et génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$, donc par définition en est une base.

La dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ est égale au nombre de vecteurs de l'une de ses bases, donc on en déduit que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 2$.

Par ailleurs, d'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))}_{=4} = \underbrace{\dim(\operatorname{Ker}(f))}_{=2} + \operatorname{rg}(f)$$

et donc $\operatorname{rg}(f) = 2$.

(4).(a). Des calculs directs donnent que :

$$\begin{aligned} f(E_1) & = \frac{1+0}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{0+0}{2}J \\ & = \frac{1}{2}\mathrm{I}_2 \\ & = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f(E_2) & = \frac{0+0}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{1+0}{2}J \\ & = \frac{1}{2}J \\ & = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} f(E_3) & = \frac{0+0}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{0+1}{2}J \\ & = \frac{1}{2}J \\ & = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et pour terminer :

$$\begin{aligned} f(E_4) & = \frac{0+1}{2}\mathrm{I}_2 + \frac{0+0}{2}J \\ & = \frac{1}{2}\mathrm{I}_2 \\ & = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par suite, puisque $f(E_1) = f(E_4)$ et $f(E_2) = f(E_3)$, deux des vecteurs de $\mathcal{F}$ sont combinaisons linéaires de deux autres. Par conséquent, il existe des relations de dépendance entre les vecteurs de cette dernière, et ainsi, $\mathcal{F}$ est une famille liée.

(b). Par définition, on a $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{rg}(f)$ et donc $\operatorname{Im}(f)$ est un espace de dimension 2.

Puisque (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par théorème, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$.

Par suite, et d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) & = \operatorname{Vect}(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)) \\ & = \operatorname{Vect}(f(E_1), f(E_2)) \end{aligned}$$

La famille $\{f(E_1), f(E_2)\}$ est une famille génératrice de deux vecteurs de $\operatorname{Im}(f)$ non nuls avec $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$, donc par théorème, elle en forme une base.