Exercice| [2851] | 1| Manipuler les expressions trigonométriques

Exprimer en fonction de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$:

(1). $\cos^4(x) - \sin^4(x)$;

(2). $\cos^4(x) + \sin^4(x)$.

Pistes de réflexion

(1). On remarquera que $\cos^4(x) = \left(\cos^2(x)\right)^2$ pour faire apparaître une identité remarquable qui donnera une formule de duplication et la relation fondamentale entre $\cos$ et $\sin$.

(2). On remarquera que $\cos^4(x) = \left(\cos^2(x)\right)^2$ et on utilisera alors les formules de duplication pour exprimer le résultat en fonction de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

Éléments de correction

(1). On a directement que :

$$\begin{aligned} \cos^4(x) - \sin^4(x) &= \left(\cos^2(x)\right)^2 - \left(\sin^2(x)\right)^2 \\ &= \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) \underbrace{\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)}_{=1} \\ &= \cos(2x) \end{aligned}$$

(2). On sait que : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

On en déduit donc que : $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

De même puisque $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, on en déduit que : $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

Finalement, il vient que :

$$\begin{aligned} \cos^4(x) + \sin^4(x) &= \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left((1+\cos(2x))^2 + (1-\cos(2x))^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x) + 1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2 + 2\cos^2(2x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2(2x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \sin^2(2x)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x) \end{aligned}$$