

Exercice [2850] | 1 | Manipuler les expressions trigonométriques

- (1). Sous réserve que toutes les expressions manipulées aient du sens, montrer que $\cos(x) \cos(2x) \cos(4x) = \frac{\sin(8x)}{8 \sin(x)}$.
- (2). Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$.

Pistes de réflexion

- (1). On utilisera plusieurs fois de suite la formule $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$ à partir de $\sin(8x)$.
- (2). Il s'agit d'utiliser à bon escient la relation établie à la question précédente pour de bonnes valeurs de x .

Éléments de correction

- (1). Puisque pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$, il vient :

$$\begin{aligned} \sin(8x) &= \sin(2 \times 4x) \\ &= 2 \sin(4x) \cos(4x) \\ &= 2 \sin(2 \times 2x) \cos(4x) \\ &= 2 \times 2 \sin(2x) \cos(2x) \cos(4x) \\ &= 4 \times 2 \sin(x) \cos(x) \cos(2x) \cos(4x) \\ &= 8 \sin(x) \cos(x) \cos(2x) \cos(4x) \end{aligned}$$

et par conséquent, sous réserve que tout ait du sens, $\frac{\sin(8x)}{8 \sin(x)} = \cos(x) \cos(2x) \cos(4x)$.

- (2). En appliquant la relation précédente pour $x = \frac{\pi}{7}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(2 \times \frac{\pi}{7}\right) \cos\left(4 \times \frac{\pi}{7}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{7} + \pi\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

De même pour $x = \frac{\pi}{9}$:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cos\left(2 \times \frac{\pi}{9}\right) \cos\left(4 \times \frac{\pi}{9}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$