

Exercice [2849] | 1 | Manipuler les expressions trigonométriques

- (1). Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a + b) + \sin(a - b)$.
- (2). En déduire que $2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right) = \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$.

Pistes de réflexion

- (1). On explicitera $\sin(a + b)$ et $\sin(a - b)$ que l'on additionnera ensuite pour trouver la relation demandée.
- (2). On développera l'expression de sorte à faire apparaître plusieurs termes sur le modèle de la question précédente que l'on réutilisera alors en mobilisant plusieurs formules de trigonométries, notamment celles de symétrie.

Éléments de correction

- (1). Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(a + b) + \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) + \cos(b) \sin(a) + \sin(a) \cos(b) - \cos(b) \sin(a) \\ &= 2 \sin(a) \cos(b) \end{aligned}$$

- (2). En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right) &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \\ &\quad + 2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \\ &\quad + 2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{3\pi}{7}\right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{5\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{5\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin(0) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\ &\quad + \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) \\ &\quad + \sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) \end{aligned}$$