Exercice| [2835] | 1| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$

Soit $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[x],\ \int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$.

(1). Le polynôme $P : x \longmapsto x - 1$ appartient-il à E ?

(2). Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que le polynôme $Q : x \longmapsto \alpha x - 1$ appartient à E.

(3). Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

(4). Montrer que : $\quad (P \in E) \quad \Leftrightarrow \quad (P \in \mathrm{Vect}\,(x \longmapsto -4x^2 + 3x, x \longmapsto -2x^2 + 1))$.

(5). En déduire une base et la dimension de E.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de s'assurer que l'on a ou non $\int_0^1 x(x-1)\,\mathrm{d}x = 0$.

(2). On traduit la condition $\int_0^1 x\,(\alpha x - 1)\ \mathrm{d}x = 0$ de sorte à déterminer la valeur de α qui permette que $Q \in E$.

(3). On commencera par vérifier que E est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}_2[x]$ et qu'il contient le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[x]$, et pour la stabilité par combinaison linéaire, on vérifiera que l'élement fabriqué par combinaison linéaire satisfait à la relation permettant de définir les éléments de E.

(4). On part d'un polynôme P quelconque de degré 2 et à l'instar de ce que l'on a fait aux questions précédentes, on cherche des conditions sur les coefficients de ce dernier pour qu'il appartienne à E.

(5). On dispose d'une famille génératrice d'après la question précédente. Il restera à s'assurer de son caractère libre pour avoir une base et la dimension de E, et comme il s'agit d'une famille de deux vecteurs, cela sera immédiat.

Éléments de correction

(1). Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\,(x-1)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (x^2 - x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left(\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right) \\
&= \left(\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2}\right)\right)_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{6} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

et par suite $P : x \longmapsto x - 1$ n'appartient pas à E.

(2). Par définition de E, on a :

$$\begin{aligned}
(Q \in E) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\int_0^1 x\,(\alpha x - 1)\ \mathrm{d}x = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\int_0^1 (\alpha x^2 - x)\ \mathrm{d}x = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left[\frac{\alpha x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{\alpha \times 1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{\alpha \times 0^3}{3} - \frac{\alpha^2}{2}\right) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\alpha = \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Par suite, le polynôme $Q : x \longmapsto \frac{3}{2}x - 1$ appartient à E.

(3). **E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}[x]$:** c'est le cas par définition de E.

Le vecteur nul $\tilde{0}$ de $\mathbb{R}[x]$ appartient à E : en effet :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \times \tilde{0}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 0\,\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Stabilité par combinaison linéaire : soient $\begin{cases} P & \in & E \\ Q & \in & E \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{cases}$

On pose $R = \lambda P + Q$, et montrons que $R \in E$, c'est à dire que $\int_0^1 xR(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

On a directement que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xR(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\,(\lambda P + Q)\,(x)\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\substack{\text{Linéarité de} \\ \text{l'évaluation}}}{=} \int_0^1 x\,(\lambda P(x) + Q(x))\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\lambda x P(x) + xQ(x))\ \mathrm{d}x \\
&\underset{\substack{\text{Linéarité de} \\ \text{l'intégrale}}}{=} \lambda \underbrace{\int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x}_{=0 \text{ car } P \in E} + \underbrace{\int_0^1 xQ(x)\,\mathrm{d}x}_{=0 \text{ car } Q \in E} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et ainsi $R \in E$

(4). En posant $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$
\begin{aligned}
(P \in E) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(\int_0^1 x\left(ax^2+bx+c\right)\,\mathrm{d}x = 0\right)\\
& \Leftrightarrow \quad \left(\int_0^1 \left(ax^3+bx^2+cx\right)\,\mathrm{d}x = 0\right)\\
& \Leftrightarrow \quad \left(\left[a\frac{x^4}{4}+b\frac{x^3}{3}+c\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0\right)\\
& \Leftrightarrow \quad \left(\left(a\times\frac{1^4}{4}+b\times\frac{1^3}{3}+c\times\frac{1^2}{2}\right)-\left(a\times\frac{0^4}{4}+b\times\frac{0^3}{3}+c\times\frac{0^2}{2}\right)=0\right)\\
& \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}=0\right)\\
& \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{4}=-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}\right)\\
& \Leftrightarrow \quad \left(a=-\frac{4}{3}b-2c\right)\\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccc} a & = & -\frac{4}{3} & b & -2 \quad c\\ b & = & & b & \\ c & = & & & c \end{array}\right.\\
& \Leftrightarrow \quad \left(P \in \mathrm{Vect}\left(x\longmapsto -\frac{4}{3}x^2+x, x\longmapsto -2x^2+1\right)\right)\\
& \Leftrightarrow \quad \left(P \in \mathrm{Vect}\left(x\longmapsto -4x^2+3x, x\longmapsto -2x^2+1\right)\right)
\end{aligned}
$$

(5). La famille $\mathcal{B} = \left\{x \longmapsto -4x^2+3x, x\longmapsto -2x^2+1\right\}$ est une famille de deux vecteurs non nuls et non colinéaires, donc par théorème, elle est libre.

Comme la famille $\mathcal{B} = \left\{x \longmapsto -4x^2+3x, x\longmapsto -2x^2+1\right\}$ est une famille libre et génératrice de E, elle en forme donc une base.

La dimension de E étant égale au nombre de vecteurs d'une de ses bases, on en déduit que $\dim(E) = 2$.